

Capitale bancario, paradosso del fattore di moltiplicazione ed *incentive-compatibility*: verso Basilea 3?

Giovanni Fulci (*), FRM
Federico Odello (*)

Gestnord Fondi SGR - Gruppo Banca Sella

15 Aprile 2002 - first draft
15 Febbraio 2003 – this version

Abstract

Questo lavoro sviluppa una nuova proposta per la determinazione del capitale bancario per i rischi di mercato. Viene evidenziato come l'attuale schema di conversione delle stime VaR in capitale di vigilanza stabilito dal Comitato di Basilea incorpori rilevanti problemi di *incentive-compatibility*. Questi sono legati alla metrica utilizzata (il VaR), al potenziale di selezione “strategica” del modello interno, ed agli spazi di *risk manipulation*. L'individuazione di una misura implicita di avversione al rischio dei *regulators* consente di stabilire un nuovo sistema dove il fattore di moltiplicazione non è più una costante, ma è variabile in funzione della risultante della misura di rischio adottata. In questo approccio possono essere direttamente integrate misure di rischio che rispettino (a differenza del VaR) gli assiomi di coerenza, come ad es. l'expected shortfall.

Introduzione

“Any statistical relationship will break down when used for policy purposes”, Goodhart, 1974.

“A risk model breaks down when used for regulatory purposes”, Danielsson, 2001.

Il rafforzamento del legame tra effettive esposizioni ai rischi e *cushion* di capitale da detenere a fronte delle predette esposizioni è la grande direttrice che negli anni recenti ha visto organi di vigilanza ed intermediari finanziari lavorare con un sempre più serrato e coordinato “approccio di consultazione”, allo scopo di definire l’evoluzione del sistema di vigilanza prudenziale, prima a fronte dei rischi di mercato¹ ed oggi con una focalizzazione maggiore sui rischi di credito ed operativi.

Le note finalità del processo accennato sono riassumibili nelle seguenti:

1. rafforzare il legame tra effettive esposizioni ai rischi e capitale di supporto a fronte delle minime perdite probabili originabili dalle esposizioni stesse, riducendo nel contempo le finestre di arbitraggio regolamentare;
2. incentivare gli intermediari a stabilire, mantenere e migliorare i sistemi interni di misurazione dei rischi;
3. stabilire dei comuni denominatori nei sistemi di misurazione dei rischi nella considerazione dei differenti gradi di sofisticazione degli intermediari.

(*) Si applicano gli usuali *disclaimers*.

¹ Cfr. Comitato di Basilea, “Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk”, Bank of International Settlement, 1996.

A fronte delle finalità accennate, questo lavoro si focalizzerà su alcune criticità che emergono ai punti 1. e 2. Verrà messo in luce come l'attuale sistema di conversione delle stime Value-at-Risk in capitale di rischio sia inficiato da problemi di *incentive-compatibility* che vanno ad alterare la risposta degli intermediari rispetto alle finalità cui il sistema stesso è deputato. I limiti dell'attuale sistema di *setting* del requisito patrimoniale per i rischi di mercato derivano congiuntamente:

- dalle problematiche endogene all'oggetto stesso della misurazione (ossia un elevato quantile della distribuzione dei P&L) e dalla metrica selezionata per misurarlo (il VaR);
- dalle limitazioni dei modelli adottati dagli intermediari per misurare l'oggetto di interesse dei regulators, sia in termini di robustezza che di volatilità della stima (risk volatility);
- dal sistema selezionato dal Comitato di Basilea per convertire le stime VaR in *risk capital*, che nell'attuale disegno è esposto a problematiche di *moral hazard*, sia in termini di selezione "strategica" del modello interno, che di manipolazione (*tail risk*) della rischiosità del portafoglio a parità di stima VaR.

In questo lavoro il par. 1 è dedicato alla descrizione dello schema stabilito dal Comitato di Basilea. Si verificheranno nel par. 2 le criticità elencate, anche mediante le analisi empiriche presentate nel par. 3. Il par. 4 riprende alcune delle problematiche endogene alla metrica VaR. Nel par. 5 viene individuata una misura implicita di avversione al rischio dei *regulators*. Questa misura consente di stabilire un nuovo sistema dove il fattore di moltiplicazione non è più una costante, ma è variabile in funzione della risultanza della misura di rischio adottata. Si arriverà quindi ad individuare un nuovo sistema che soddisfi contemporaneamente le tre finalità descritte, tenendo presente e formalizzando l'avversione al rischio del *regulator*, e nel contempo risolvendo i problemi di carenza/incompatibilità degli incentivi ai fini del miglioramento continuo dei modelli interni da parte degli intermediari e di una maggior *disclosure* del livello effettivo di rischio sostenuto.

Si procederà nel par. 6 a trarre le conclusioni, dopo un confronto della soluzione proposta con lo stato dell'arte, con l'approccio del *pre-commitment*² e con quello, più basato su *rules-of-thumb*, di stabilire livelli arbitrari nella magnitudine del fattore di conversione delle stime VaR in capitale di rischio.

1. Il sistema attuale

L'introduzione della possibilità di utilizzare i modelli "proprietari" per il controllo delle esposizioni ai rischi di mercato, e la successiva conversione, mediante un fattore di moltiplicazione (*scaling factor*) stabilito dagli organi di vigilanza, del valore a rischio complessivo in requisito patrimoniale rappresenta una tra le innovazioni più significative nelle regole di vigilanza prudenziale. Viene in tal modo ad instaurarsi, tra vigilanza ed intermediari, una struttura contrattuale di delega³, sottoposta a condizioni che favoriscono trasparenza ed omogeneità di trattamento tra i diversi delegati. Affinché il meccanismo di delega funzioni, ossia influenzi e favorisca un comportamento degli intermediari coerente con gli obiettivi della vigilanza, la struttura del contratto dovrebbe essere incentivante. Sinteticamente l'obiettivo della vigilanza può essere individuato nella riduzione del costo economico dell'instabilità finanziaria. Poiché la strategia a fronte di questo obiettivo si sostanzia nell'imposizione di dotazioni di capitale continuamente proporzionali ai rischi assunti (ottenibile unicamente tramite il monitoraggio continuo ed accurato degli stessi), la nuova normativa costituisce un incentivo generale alla predisposizione di specifici sistemi di rilevazione e modellizzazione dei rischi.

Quello che si intende porre qui in evidenza è l'inadeguatezza dello schema di graduazione del fattore di moltiplicazione come incentivo a migliorare l'accuratezza e la validità previsionale delle stime di rischiosità ottenute dai modelli proprietari. Si vedrà nei paragrafi successivi una possibile soluzione in merito. Il contratto隐式 tra organo di controllo e soggetto vigilato prevede comunque la possibilità di

² Cfr. Kupiec e O'Brien., op. cit.

³ Cfr. Enria A. e S. La Viola, "Requisiti patrimoniali, incentivi e controllo del rischio", Rivista Bancaria, 1997, n.1, pgg. 91-105.

utilizzare i modelli solo se questi dimostrano una adeguata capacità di stimare il rischio⁴; in caso contrario deve esistere un meccanismo di penalizzazione credibile, disincentivante rispetto all'adozione di modelli inadeguati. Questo meccanismo è individuato dall'attuale normativa considerando una graduazione del fattore di moltiplicazione FM(v) in funzione del numero "v" di violazioni realizzate rispetto al VaR previsto dal modello interno. Il requisito di capitale (RCrm) a fronte del rischio di mercato è allora esprimibile come:

$$RCrm_{t+1} = \max \left[VaR_t(T, \alpha); FM(v) \cdot \frac{1}{60} \sum_{i=0}^{59} VaR_{t-i}(T, \alpha) \right] + RS_t$$

dove: FM(v) è il fattore di moltiplicazione, variabile tra 3 e 4 a seconda della bontà del modello; VaR_t(T,α) indica il VaR decadale⁵ su un intervallo di confidenza (100 - α)%, con α=1; RS_t è un onere di capitale addizionale a fronte del rischio specifico di portafoglio⁶. Il requisito patrimoniale cui l'intermediario dovrà far fronte su base giornaliera sarà così pari al maggiore tra le due quantità in parentesi, ossia al più grande tra il requisito dedotto dal valore a rischio del giorno precedente e quello calcolato sulla media dei numeri VaR relativi agli ultimi 60 giorni, aumentata per il fattore moltiplicativo FM(v). In questo modo si ottimpera sia all'esigenza di considerare giorni di particolare rischiosità del portafoglio, sia di mantenere una stabilità dei requisiti patrimoniali, grazie all'effetto della media⁷. FM(v), nelle previsioni dell'*Amendment*, varia da un minimo assoluto di 3 ad un massimo di 4⁸ (quest'ultimo valore maggiorabile a discrezione delle singole autorità di vigilanza nazionali).

Il Comitato di Basilea ha sottolineato come il fattore di *add-on* compreso tra 0 e 1 fornisca un incentivo alla costruzione di modelli VaR più accurati: minore il numero di "violazioni" realizzate (ossia il numero di volte nelle quali la perdita effettiva realizzatasi sul portafoglio è maggiore di quanto previsto dal modello VaR), più vicino a tre sarà l'elemento moltiplicativo e quindi minore il conseguente requisito di patrimonializzazione.

2. Incentive-compatibility?

2.1 Criticità del sistema attuale: arbitraggio con selezione strategica del modello interno.

Si vuole qui rilevare come la struttura dell'incentivo proposta dal Comitato di Basilea sia completamente dominata dal componente fisso pari a 3, il quale elimina qualsiasi vantaggio potenziale di raggiungere un

⁴ Questa capacità viene verificata (tralasciando gli aspetti organizzativi e di controllo) sia ex-ante (cfr. Comitato di Basilea, gennaio 1996), in quanto l'autorizzazione all'utilizzo di un modello interno è subordinata al fatto che il modello VaR deve aver raggiunto un dimostrabile grado di accuratezza nella misurazione del quantile di interesse (e comunque deve essere ritenuto adeguato alla realtà operativa della banca), sia tramite la continua verifica ex-post del modello "autorizzato", con la procedura dei test retrospettivi.

⁵ E' importante sottolineare una distinzione: mentre il *backtesting* è condotto su stime VaR giornaliere, il requisito di patrimonializzazione soggiace ad un orizzonte decadale.

⁶ Cfr. Comitato di Basilea, "Modifications to the Market Risk Amendment", Banca dei Regolamenti Internazionali, settembre 1997. Nel settembre 1997 l'"Amendment" è stato integrato per tenere conto del rischio specifico di strumenti legati ad azioni e tassi di interesse, consentendo alle banche che già soddisfano i requisiti per il calcolo del rischio di mercato mediante il modello VaR interno, di utilizzare modelli proprietari anche per il calcolo del rischio specifico, sottoposti ad un ulteriore set di condizioni.

⁷ L'operare di questo effetto consente di ottenere requisiti patrimoniali omogenei nel tempo anche in giorni in cui il valore a rischio si posiziona su una scala differente rispetto a quelli della usuale operatività.

⁸ Dipendendo questo incremento dai risultati dei test retrospettivi e dal conseguente posizionamento sulle tre zone di classificazione dell'accuratezza del modello. Cfr. il documento del Comitato di Basilea sul *backtesting*, prec. cit., e la descrizione delle zone in Appendice 1.

grado di precisione del modello tale che l'*add-on* sia pari a zero. Si intende inoltre rilevare l'assenza di sufficiente discriminazione (*robustness sensitivity*) tra accuratezza dei diversi metodi di stima del VaR ed il proporzionale onere in termini di capitale. Ciò determina l'effetto perverso di disincentivare la ricerca e costruzione di modelli VaR più robusti, implicitamente lasciando aperta agli intermediari una potenziale finestra di arbitraggio regolamentare nella selezione "strategica" del modello interno. Per chiarire quest'ultimo punto, si può far riferimento al seguente esempio. Vi siano due diversi intermediari, con un identico portafoglio, ma con due modelli interni VaR differenti. L'attuale sistema di determinazione del requisito patrimoniale:

1. a parità di numero di *exceptions*, non discrimina tra metodi più o meno onerosi in termini di capitale;
2. se il modello del primo intermediario fornisce un numero di *exceptions* sistematicamente uguale a quello atteso ed il modello del secondo intermediario (verosimilmente meno oneroso in termini di capitale) fornisce un numero di *exceptions* superiore, ma, ad es., inferiore a 4 (ossia all'interno della *green zone* stabilita da Basilea), non vi sarà l'applicazione della maggiorazione prevista nello schema di graduazione del fattore di *add-on*⁹, arrivando al risultato paradossale di applicare un onere di capitale maggiore al modello VaR più robusto.

La verifica delle ipotesi accennate verrà affrontata con le risultanze delle analisi nel paragrafo 3.

2.2 Criticità del sistema attuale: arbitraggio con tail risk e risk manipulation.

La possibilità di arbitraggio regolamentare potrebbe sorgere anche dalla conoscenza della forma funzionale della coda della distribuzione dei rendimenti oltre l'elevato intervallo di confidenza stabilito dal VaR e dar luogo a problematiche di *moral hazard* implementando strategie di trading con il risultato di manipolare la rischiosità del portafoglio a parità di VaR¹⁰.

Ciò è possibile poiché il VaR ha un *tail risk* (letteralmente, rischio coda). Il VaR ha un *tail risk* quando fallisce nel riassumere completamente le scelte relative tra portafogli differenti a causa della sottostima del rischio dei portafogli con *payoff* caratterizzati da distribuzioni con code spesse. Ciò è generalizzabile per qualsiasi misura di rischio adottata (ad es., *l'expected shortfall*). Recentemente alcuni autori¹¹ hanno definito come una misura di rischio sia *free of tail risk* se tiene in considerazione le informazioni riguardo la coda della sottostante distribuzione. Poiché tra gli obiettivi della normativa di vigilanza dovrebbe esserci quello di incentivare gli intermediari finanziari al corretto "ordinamento"¹² nella selezione di portafogli caratterizzati da profili di rischiosità implicita differente, si può affermare che l'attuale sistema di vigilanza fallisce nell'incentivare la corretta selezione di portafoglio, anche assumendo che il modello utilizzato fornisca stime sempre robuste del VaR. Di seguito riportiamo tre esempi per descrivere le implicazioni operative e di modellizzazione di quanto esposto:

1. *risk manipulation*, implementando strategie con opzioni call e put. L'esempio è tratto da Danielsson (2001);
 2. modellizzazione delle code spesse mediante una distribuzione di Pareto generalizzata.
 3. *tail risk* del VaR, evidenziato dal confronto tra portafogli contenenti differenti opzioni digitali;
1. Danielsson mostra come si possa manipolare il VaR di un asset semplicemente implementando strategie con opzioni. Sia VaR(a) il VaR dell'asset considerato. Si supponga che il livello VaR desiderato sia VaR (b), con $VaR(b) > VaR(a)$. Si può ottenere questo risultato vendendo una call con strike price inferiore a $VaR(a)$ e contemporaneamente comprare una put con strike superiore a $VaR(b)$. Il profilo della distribuzione del *payoff* del portafoglio risultante dalla combinazione delle due opzioni e del generico asset detenuto mostrerà più bassi profitti attesi, con un incremento del *downside risk* oltre il livello stabilito dal $VaR(a)$. Per una illustrazione grafica di quanto esposto, cfr. Appendice 2.

⁹ Vi sono peraltro elementi di mitigazione alla conversione meccanica del numero di *exceptions* in proporzionale crescita del fattore di *add-on*. Ad es., con 7 *exceptions* (*yellow zone*) si otterebbe un incremento del moltiplicatore di 0,65 (da 3 a 3,65), sempre che le autorità di vigilanza non siano persuase che la cattiva performance del modello interno sia dovuta a speciali fattori. Cfr. Comitato di Basilea op. cit. ed Appendice A.

¹⁰ Cfr. anche Danielsson, op. cit. ed Appendice 2.

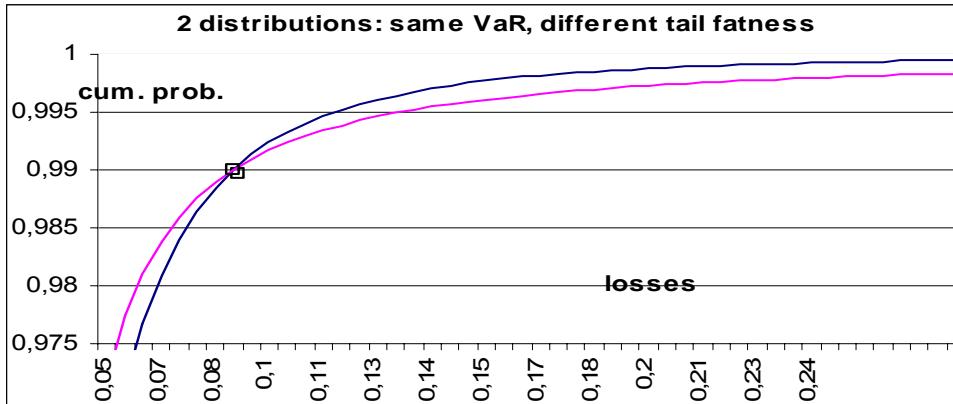
¹¹ Cfr. Yamay e Yoshiha, 2002c.

¹² Ossia la corretta sequenza di portafogli ordinati in base ad una funzione i cui argomenti siano (rischio;capitale di supporto; rendimento atteso).

Al riguardo v'è da considerare come la normativa di vigilanza preveda che l'oggetto della *disclosure* delle risultanze dei modelli VaR sia un singolo, elevato quantile della distribuzione dei ritorni di portafoglio, rimanendo quindi all'oscuro delle perdite attese condizionali al fatto che il VaR stesso sia superato.

La modellizzazione delle code spesse delle distribuzioni con gli strumenti analitici disponibili dalla teoria dei valori estremi può evidenziare quanto esposto finora.

2. La funzione di distribuzione delle eccedenze oltre un elevato limite (ad es. quello rappresentato dal VaR) può essere approssimata da una distribuzione di Pareto generalizzata¹³. A parità di Var al 99% di confidenza, le due distribuzioni A e B hanno un indice di coda ξ rispettivamente pari a 0.8 e 0.4 e parametri di scala σ pari nell'ordine a 0.05 e 0.035. La funzione di distribuzione delle eccedenze di A mostra chiaramente un maggior rischio nella coda.



3. La differenza rappresentata nel grafico può essere ottenuta ad es. con posizioni corte su opzioni digitali¹⁴. Ad es., un trader riceve un ammontare A a fronte del quale vende un'opzione digital call, con strike price S, impegnandosi a pagare un ammontare di 100 se l'asset sottostante l'opzione digitale raggiunge lo strike prima dell'*expiry* dell'opzione. Si supponga che la probabilità che l'asset raggiunga lo strike sia pari a 0,05%. Il VaR al 99% della posizione sarebbe pari -A, poiché la probabilità di perdere 100 è oltre il quantile rilevato nel VaR. Un secondo trader apre un'altra posizione corta su una opzione digitale su un altro asset, riceve per l'opzione un ammontare B=A e la probabilità di raggiungere lo strike è questa volta ancora pari a 0,05%, ma si impegna a pagare un ammontare di 120 se lo strike price viene toccato. Il VaR di questa seconda posizione è -B, identico a quello della posizione del primo trader.

Il VaR presenta quindi diverse criticità: 1. insistendo su un singolo quantile, non distingue tra esposizioni diverse; 2. non riassume il corretto ordinamento dei portafogli in base alla reale rischiosità sostenuta. Una misura delle perdite attese oltre un elevato *threshold* della distribuzione (modellata od empirica) è data dall'*expected shortfall* (ES)¹⁵. Con esposizioni che generano la stessa stima di VaR (ed anche assumendo di essere dotati di modelli che stimino il VaR perfettamente) l'intermediario ha la facoltà di selezionare l'esposizione con ES più elevato (chiaramente se la stessa riceva una valutazione di maggior rendimento medio atteso). Poiché infatti le distribuzioni dei rendimenti di mercato sono difficilmente riconducibili sia ad una distribuzione normale, sia ad una identica distribuzione non normale, esposizioni che generano lo stesso VaR possono essere caratterizzate da ES sostanzialmente differenti. Se alla distribuzione

¹³ Per una spiegazione dettagliata si rimanda a Embrechts, Küppelberg e Mikosh, 1997, op. cit.. La logica di approssimare una distribuzione con code spesse via distribuzione di Pareto implica un decadimento (approssimare a zero) delle code molto lento, come una funzione di potenza. L'assunzione di normalità implica invece un decadimento nelle code più veloce, come una funzione esponenziale. Per il grafico riportato, la distribuzione delle eccedenze di Z oltre l'elevato limite rappresentato da θ è: $F[Z(x)] = 1 - p[1 + \xi(x - \theta)/\sigma]^{-1/\xi}$, $x \geq \theta$, con p la probabilità di coda, θ il valore di *threshold* della coda, ξ indice di coda e σ parametro di scala. Maggiore è ξ più spessa sarà la coda. A parità di indice di coda, maggiore il parametro di scala, più spessa la coda.

¹⁴ Una posizione lunga su una opzione digitale dà il diritto di ricevere un pagamento di ammontare prefissato condizionale al fatto che l'asset sul quale è scritta vada sotto (digital put option) o sopra lo strike price (digital call option). Vedi per una estensione di questo esempio al problema della subadditività Yamai e Yoshida, 2002-E-2.

¹⁵ Nel caso di una distribuzione continua P della perdite di portafoglio, l'ES al $100*(1-\alpha)\%$ intervallo di confidenza $ES_\alpha(P)$ è definibile come $ES_\alpha(P) = E [P | P \geq VaR_\alpha(P)]$, con E operatore di valore atteso. Per una formulazione corretta dell'ES in assenza di ipotesi sulla distribuzione, cfr. Acerbi e Tasche, 2001, op. cit.

dei profitti e perdite del portafoglio si potesse sempre applicare l'assunzione di normalità, *l'expected shortfall* ed il VaR sarebbero multipli scalari l'uno rispetto all'altro, poiché entrambi sono multipli scalari della deviazione standard¹⁶.

Una ulteriore area di potenziale fallimento del sistema di conversione delle stime VaR in requisito patrimoniale è quindi determinata dal possibile incentivo per gli intermediari a massimizzare l'ES dato un vincolo di capitale e di *disclosure* formulato in termini proporzionali al VaR.

2.3 Le soluzioni finora proposte

Da quanto esposto si evince come il basare i requisiti di capitale degli intermediari su un solo quantile della distribuzione possa generare seri problemi.

Ad oggi sono disponibili pochissime **proposte strutturate di modifica** del sistema, tra le quali l'approccio del *pre-commitment*¹⁷ proposto nel 1995 da Kupiec ed O'Brien e l'innovativo New General Approach (NGA) proposto nel dicembre 2002 da Taylor (vedi nota 17).

Vi sono poi le proposte, avanzate da numerosi studiosi ed esponenti del mondo bancario internazionale, di eliminare il fattore di moltiplicazione per quei metodi VaR (come, ad es., quelli scaturiti dall'Extreme Value Theory) che si dimostrino robusti nelle code estreme delle distribuzioni dei *financial returns*, oggetto stesso delle stime VaR. Il fattore di moltiplicazione pari a tre viene infatti ritenuto troppo elevato ed arbitrario¹⁸. Peraltro, una giustificazione statistica alla magnitudine dello *scaling factor* è stata formalizzata da Stahl¹⁹, che ha calcolato un valore teorico del fattore di moltiplicazione pari a 4,29 (addirittura più elevato di 3, per un intervallo di confidenza del 99%) nel caso di utilizzo di una distribuzione normale, giungendo alla conclusione che, il fattore pari a 3 è un accettabile compromesso per limitare gli errori di specificazione distributiva dei modelli VaR "normali" e l'approssimazione statistica di utilizzare la regola della radice quadrata del tempo (ossia ipotesi di dati i.i.d. e volatilità indipendente nel tempo).

¹⁶ Cfr Yamai Y. E T. Yoshiha, op. cit. Nell'ipotesi di normalità, l'expected shortfall al 99% di intervallo di confidenza sarebbe pari alla deviazione standard moltiplicata per 2,67 (al 99% lo scalare sarebbe pari a 2,323), che è lo stesso livello del VaR calcolato al 99,6% di livello di confidenza.

¹⁷ cfr. Kupiec e O'Brien, op. cit. e Taylor C., op. cit.. I primi due autori hanno cercato di scavalcare l'utilizzo di formule che, in maniera meccanica, traducono le stime VaR in *risk capital*. Nell'approccio proposto dai due autori, l'intermediario finanziario predispone ex-ante (ad es., all'inizio di ogni trimestre) una sorta di budget per il capitale a rischio di mercato da detenere. L'approccio è corredata da un ampio sistema di penalità da applicare laddove il *supervisor* verifichi che le perdite effettivamente registrate durante il periodo abbiano ecceduto il capitale predisposto inizialmente. Questo approccio è interessante per diverse ragioni: 1. fornisce flessibilità nel determinare il capitale ed incentiva le banche a contenere il proprio rischio all'interno di quanto dichiarato all'inizio del periodo; 2. non è intrusivo, ossia consente agli intermediari di stabilire il capitale in relazione ai loro obiettivi di business senza introdurre effetti distorsivi da parte della regolamentazione; 3. richiede un minor sforzo di supervisione ai *regulators*. Sebbene attraente, questo approccio presenta seri problemi di implementazione, come ad es., il disegno della struttura di penalità. Questo approccio peraltro aggira la necessità di una formula meccanica per la determinazione iniziale del capitale, ma necessità comunque dell'applicazione, più o meno meccanicistica, ex- post, di "formule di penalità", e presenta problemi pratici di applicazione (ad es., consente all'intermediario di accumulare rischio senza impatti immediati sul proporzionale requisito di capitale). Per una critica vedi anche Sironi A. e M. Marsella, op. cit..

Taylor (2002) propone il cd. NGA (New General Approach), evolutivo e fortemente innovativo rispetto a quello del *pre-commitment*. In questo approccio l'intermediario propone tre parametri: α (ossia un livello target di capitale), κ (un capital threshold) e τ (un loss threshold). Il regulator stabilisce il parametro λ (loss parameter). Il loss threshold τ è determinato dal prodotto di κ per λ . L'intermediario dovrà mantenere il suo capitale ad un livello maggiore di κ e le sue perdite ad un livello inferiore a τ al fine di evitare *regulatory action*. Tale approccio ha numerosi vantaggi rispetto allo schema stabilito finora in Basilea2, che non esploriamo qui per esigenze di brevità.

¹⁸ Si può verificare come, moltiplicando il VaR per la radice dell'orizzonte decadale ed applicando lo scaling factor minimo di 3, si ottiene un requisito di capitale pari a circa 22 volte la variabilità media del portafoglio. Questo fattore può essere visto come il moltiplicatore di una massima perdita probabile su un orizzonte di circa 4 anni (99% e $\sqrt{10}$).

¹⁹ Cfr. Stahl G., "Three Cheers", Risk Magazine, Maggio 1997, pgg.67-69. L'autore ha messo in rapporto la disegualanza di Chebyshev (calcolato al 99% di intervallo di confidenza per una arbitraria distribuzione con varianza finita) con la corrispondente distribuzione normale.

3. Analisi empiriche

Una dimostrazione della rilevanza delle problematiche accennate è di immediata evidenza ed emerge distintamente nei numeri confrontando la validità previsionale e le performance dei differenti modelli di stima del value-at-risk nell'ampia letteratura²⁰ prodotta negli ultimi anni da numerosi autori e studiosi. Sebbene le criticità evidenziate in questo lavoro abbiano rilevanza generale, a titolo di esempio si considereranno comunque tre differenti analisi: la prima su azioni statunitensi, la seconda su un portafoglio azionario italiano ed un'ultima su portafogli valutari.

Il primo studio considerato è stato effettuato da due econometri²¹, Danielsson e DeVries²². Gli autori hanno svolto un ampio confronto, basato su 500 portafogli simulati²³, della robustezza di tre differenti metodi VaR: l'approccio varianza-covarianza di RiskMetrics™, il metodo delle simulazioni storiche ed un metodo semiparametrico che adatta una forma funzionale alle *fat tails* empiriche utilizzando le metodologie statistiche dell'Extreme Value Theory. Nella tabella sono riportati i risultati medi ottenuti dal backtest effettuato sui 500 portafogli considerati:

Bontà previsionale dei differenti metodi - backtesting su 1000 giorni implementato su 500 portafogli simulati. Risultati medi di exceptions:

Livello di confidenza	95%	99%	99,5%	99,75%
Numero atteso di exceptions	50	10	5	2,5
Approccio varianza-cov.	52,45	16,28	10,65	7,29
Simulazioni storiche	43,24	7,66	3,69	1,90
Metodo semiparametrico	43,14	8,19	4,23	2,35

Si può verificare come se il numero di violazioni è maggiore del valore atteso, si avrà una sottostima del VaR, e viceversa. Nonostante vi siano differenze, anche significative, tra le capacità previsive dei tre differenti metodi, il metodo basato sull'EVT²⁴ sembra quello in grado di generare stime VaR più robuste e conservative. L'ampio data set utilizzato peraltro fornisce robustezza alle risultanze del backtesting esposte in tabella. Dai valori emerge come, su un orizzonte di backtest di 1000 giorni, tutti e tre i metodi sarebbero stati nella *green zone* di Basilea poiché, in media (in ipotesi di assenza di *clustering* tra *exceptions*), nessuno dei tre metodi genera un numero di *exceptions* maggiore di 4 su un orizzonte di validazione "regolamentare" di 250 giorni.

Tale risultato è di immediata evidenza rielaborando i dati dividendo il numero di *exceptions* dei differenti metodi analizzati per l'intervallo di confidenza di vigilanza pari al 99%. Per l'approccio varianza-covarianza si ottengono in media poco più di 6 violazioni che possono essere imputate come 1,5 violazioni

²⁰ Cfr. ad es. Danielsson, settembre 2001; Engel e Jizycki, 1999; O'Brien e Berkowitz, 2001; Hendriks, 1996. Un'ottima ed ampia rappresentanza delle ricerche in materia è disponibile sul sito <http://www.gloriamundi.org>

²¹ I lavori di ricerca di questi studiosi possono essere scaricati dai siti internet <http://cep.lse.ac.uk/~jond> e <http://www.RiskReserch.org>.

22 Danielsson J. E C. de Vries "Value-at-Risk and Extreme Returns", London School of Economics-Financial Market Group, settembre 1997, Discussion Paper n.273.

²³ Utilizzando serie storiche composte da circa 1500 variazioni giornaliere, dal febbraio 1987 al gennaio 1993, e prendendo, per il *backtest* dei tre modelli, un orizzonte di validazione di 1000 giorni. I portafogli simulati sono stati ottenuti applicando alle azioni in portafoglio 500 diversi set di pesi generati in maniera random

²⁴ Gli autori presentano, oltre ai valori medi riportati in tabella, le corrispondenti percentuali di errore standard della stima, che danno la dimensione della stabilità delle stime VaR sui 500 portafogli simulati. Pur avendo scelto di non riportarli in questo lavoro per esigenze di brevità, è importante evidenziare che l'approccio varianza-covarianza mostra un errore minore degli altri metodi solo al livello del 5° percentile. Sui livelli di confidenza più elevati il metodo dei valori estremi si mostra sempre superiore agli altri metodi, con valori di errore significativamente più bassi. (e valori medi di violazione più vicini ai valori attesi).

sull'orizzonte di validazione regolamentare di 250 giorni. Gli altri due approcci producono in media una sovrastima del VaR sugli intervalli di confidenza desiderati, e quindi non vengono imputate violazioni. Dai dati dell'analisi sopra riportata si evince come l'intermediario che avesse utilizzato il metodo EVT avrebbe paradossalmente subito un onere di capitale verosimilmente maggiore a fronte di un metodo più robusto degli altri²⁵.

Al di là dei metodi analizzati nello studio riportato, il problema di *incentive-compatibility* è evidente: da un lato le banche preferirebbero requisiti di capitale il più bassi possibile e fronteggiano un fattore di moltiplicazione delle loro stime VaR elevato, e variabile da tre a quattro; dall'altro, la selezione "strategica" di un determinato modello VaR può implicare requisiti di capitale significativamente più bassi rispetto a modelli più conservativi pur essendo soggetto al medesimo *scaling factor*. Peraltra la struttura di penalità a fronte di sottostime del VaR è relativamente "moderata", consistendo nell'incremento da tre a quattro del fattore di moltiplicazione. Ne scaturisce che è nell'interesse delle banche quello di utilizzare modelli VaR che forniscano le stime VaR più moderate. In generale, questi modelli saranno i meno accurati disponibili. Questo può spiegare la tendenza delle banche ad utilizzare modelli VaR che si basano su medie mobili e normalità condizionale²⁶. Due aspetti della performance dei modelli VaR hanno peraltro una relazione diretta: in un modello VaR il livello di accuratezza della stima ha una relazione positiva con la magnitudine della stima stessa.

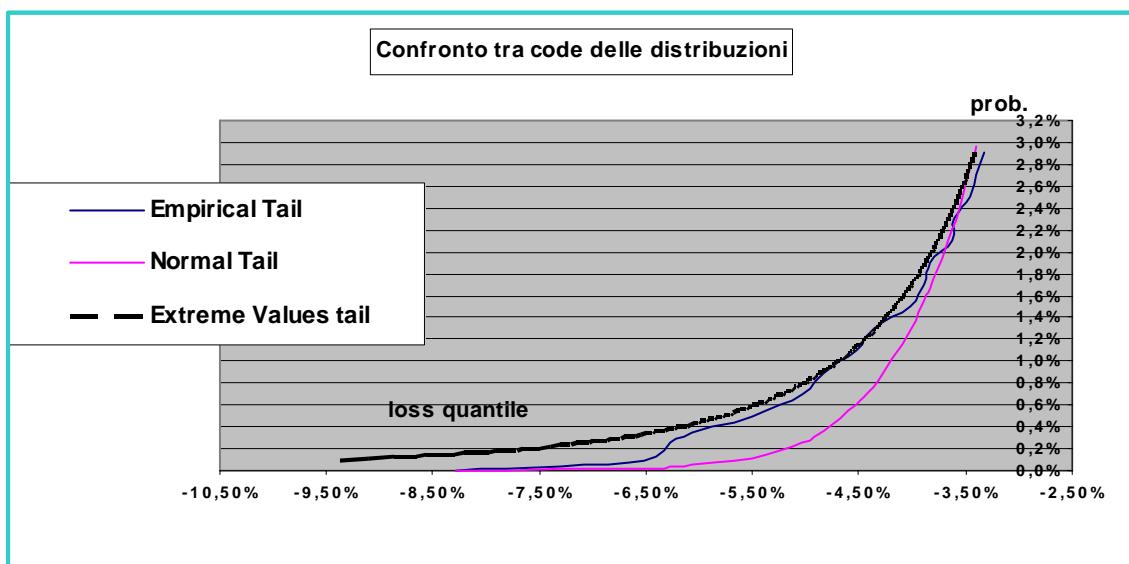
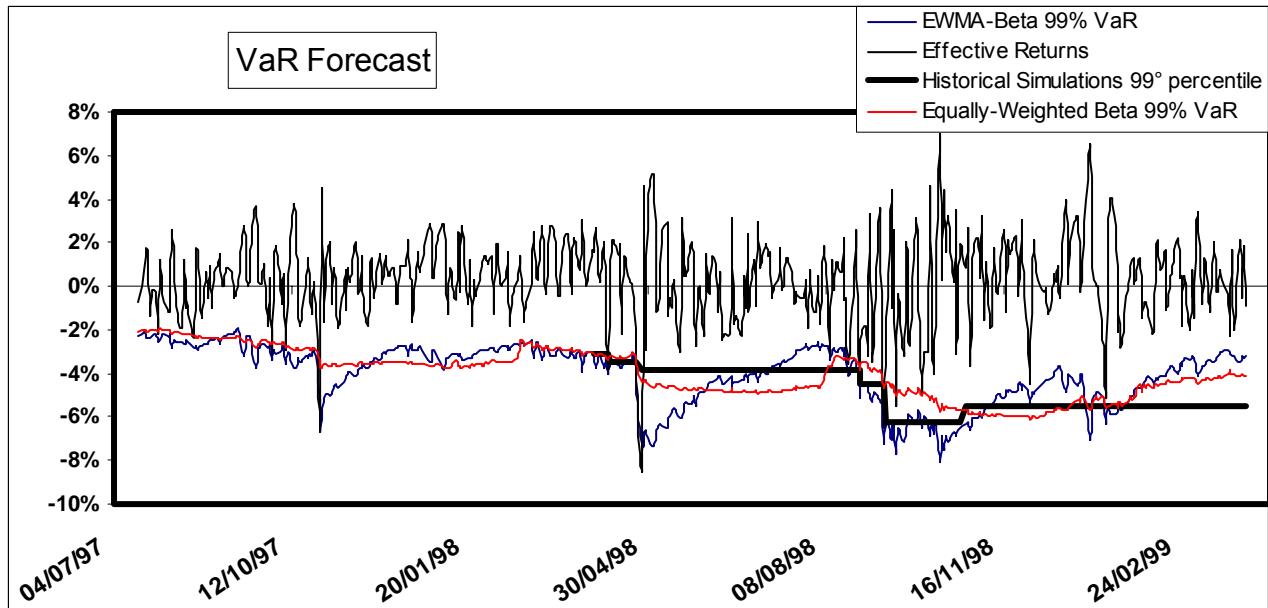
Al fine di verificare la relazione diretta tra oneri di capitale e grado di copertura dei differenti metodi, è stata condotta una analisi su un portafoglio costituito da titoli del MIB30 con dati giornalieri su un periodo dal dicembre 1996 all'aprile 1999, comprendendo quindi uno dei recenti periodi di turbolenza dei mercati (estate 1998, con la crisi russa e del LTCM). Sono state utilizzate le stesse metodiche VaR²⁷ esplorate nello studio di Danielsson e DeVries, con l'aggiunta dell'approccio RiskMetrics™ *equally weighted*²⁸. Nei due grafici sotto riportati, insieme all'andamento dei ritorni giornalieri del basket comprendente tutti i titoli del MIB30 *equally weighted*, si riportano le stime VaR fornite dai differenti modelli analizzati. Nella successiva tabella sono evidenziati il numero di exceptions ed il livello di copertura delle metodiche analizzate sull'orizzonte temporale di vigilanza relativo agli ultimi 250 giorni dell'intervallo triennale di dati considerato. Ai livelli di copertura sono associati i potenziali incrementi dello *scaling factor* ed i suoi valori assoluti, così come stabiliti dal Comitato di Basilea. Si riportano inoltre i risultati medi a 60 giorni di perdita probabile. Gli stessi sono moltiplicati per lo *scaling factor* appropriato ed ancora scalati per l'orizzonte decadale richiesto dalla vigilanza.

²⁵ Per una valutazione, si veda allo scopo la successiva analisi condotta su portafogli valutari da Engel e Jizycki, 1999.

²⁶ Cfr. Danielsson e DeVries, op. cit. I due autori utilizzano una felice metafora per descrivere il problema: "It is like using a protective sun-block, because one has to, but choosing the one with lowest protection factor because its cheapest, with the results that one still gets burned".

²⁷ Per una spiegazione dettagliata dell'extreme value theory, vedi per tutti Embrechts, Klüppelberg e Mikosh. op. cit. Per gli stimatori utilizzati in questa analisi si veda anche Danielsson J. e C. deVries, settembre 1997.

²⁸ Ossia si è considerata anche la serie storica delle variazioni giornaliere ugualmente pesata, a differenza dell'approccio standard di RiskMetrics™ che utilizza serie storiche con pesi con decadimento esponenziale (ossia assegnando maggior peso alle variazioni più recenti).



No.	VaR methods	no. exceptions (250 days)	coverage	% increase in scaling factor	abs value scaling factor	value of estimated losses	Abs capital charge (+ possible increase in scaling factor)
1	Ex.WMA	7	97,20%	21,70%	3,65	-3,31%	12,74%
2	Eq.WMA	7	97,20%	21,70%	3,65	-4,08%	15,70%
3	Hist.Sim.	5	98,00%	13,30%	3,4	-5,50%	19,71%
4	EVT	3	98,80%	0%	3	-4,70%	14,86%

Dal confronto dei *capital charge* e delle percentuali di copertura fornite dai differenti modelli emergono ancora le criticità ed i paradossi già evidenziati nel precedente esempio. Laddove il metodo 1 dimostra una minor robustezza previsiva rispetto al metodo 4 (con un livello di copertura del metodo 1 inferiore dell'1,80% rispetto al "target di vigilanza", contro uno scarto di solo lo 0,20% del metodo 4), l'applicazione al solo metodo 1 della penalità mediante un incremento dello scaling factor pari al 21,70%

rispetto al valore *floor* pari a 3 mantiene un onere di capitale per il metodo 1 inferiore a quello subito dal metodo 4, nonostante quest'ultimo si dimostra sistematicamente più robusto nella stima. Si rende così nuovamente evidente il problema di *incentive-compatibility* derivante dalla carenza di discriminazione tra intermediari finanziari che, pur fronteggiando gli stessi rischi, adottino modelli con capacità previsive differenti. Inoltre, dal confronto tra i metodi 1 e 2 si può verificare come, a parità di rischi sopportati, ed a parità di capacità previsiva e complessità dei due differenti metodi (ambedue con 7 *exceptions* nell'orizzonte di validazione considerato) vi è una differenza del 23% (12,74% contro 15,70%) nell'onere di capitale applicato ai due differenti intermediari.

Il terzo, estensivo studio qui rilevante per le sue risultanze è centrato sul confronto delle performance relative ed assolute dei differenti modelli di stima del VaR. Tale studio è stato condotto da Engel J. e M. Jizycki²⁹. Dall'analisi dei dati proposti dai due studiosi menzionati viene verificata la relazione positiva tra magnitudine della stima ed accuratezza tra i diversi modelli. La verifica della performance in termini di dimensione della stima VaR sui differenti modelli è stata condotta utilizzando una misura di *mean relative bias*³⁰. Alcuni modelli (le simulazioni storiche, l'antithetic e l'exponential HS, la stima mediante il metodo dei valori estremi) producono stime VaR mediamente più elevate (in un range tra l'8% ed il 25%) della media delle stime VaR di tutti i modelli considerati. Simili sono le risultanze dello studio di Hendricks (1996), che individua per il metodo delle simulazioni storiche un *mean relative bias* superiore di una percentuale tra il 5% ed il 14% rispetto agli altri metodi considerati. Stime VaR lievemente sotto la media (circa il 4%) sono fornite dalla famiglia dei metodi *exponential-smoothing*. Fortemente sotto la media (tra il -15% ed il -22%) sono le stime VaR che scaturiscono dai metodi kernel univariati. Di analoghe entità le risultanze dell'analisi svolta sul portafoglio di azioni italiane. La stima VaR ottenuta via EVT è maggiore del 15% della stima ottenuta con la metodologia RiskMetrics™ considerando serie storiche di dati ugualmente pesati.

L'accuratezza di un modello VaR, che è l'obiettivo principale anche delle verifiche degli organi di vigilanza, può essere valutata verificando se i risultati del modello sono consistenti con il desiderato livello di copertura delle probabilità di perdita. Mediante una *binary loss function* possono essere contate le *exceptions*, cui viene dato uguale peso e valore pari a 1, e rapportate alla finestra temporale di valutazione. Se il modello è accurato al 99° percentile, si avrà un valore della funzione pari a 0,01, se è non accurato si avranno valori superiori (essenzialmente quindi la metodologia per i test retrospettivi proposta dal Comitato di Basilea). Rielaborando i risultati della verifica empirica condotta dai due studiosi si verifica come, in media, solo i metodi delle simulazioni storiche e quello basato sulla teoria dei valori estremi producono stime VaR consistentemente vicine al desiderato livello di copertura.

Una misura più robusta di accuratezza è individuabile nella *quadratic loss function*. L'applicazione di una forma funzionale quadratica alle *exceptions* fornisce informazioni maggiori. Si tiene infatti conto della dimensione dell'*exceptions*, e nel contempo vengono "penalizzate" maggiormente le *exceptions* più grandi. Al 99% di confidenza, il modello dei valori estremi produce le più basse perdite quadratiche. Il *ranking* relativo dei modelli VaR fornito dalla *quadratic loss function* è molto simile a quello risultante dall'utilizzo della *binary loss function*. Ciò suggerisce l'esistenza, tra i diversi modelli, di una relazione tra numero di *exceptions* e dimensione delle stesse. Analizzando congiuntamente i diversi elementi di valutazione delle performance dei numerosi modelli VaR considerati si può quindi verificare come i modelli con maggior *ranking* in termini di *mean relative bias* (ossia con stime VaR maggiormente conservative rispetto a tutti gli altri modelli) sono anche quelli con più elevato *ranking* nella valutazione dell'accuratezza della stima, considerata quest'ultima congiuntamente via *binary* e *quadratic loss function*.

Si evidenzia quindi la relazione diretta nella differenza tra grado di copertura effettivo ed atteso del modello e *conservativeness* della stima VaR fornita. Stime maggiormente conservative portano con sé,

²⁹ Per un estensivo studio delle relazioni tra accuratezza della stima VaR, magnitudine ed efficienza si rimanda alla poderosa analisi svolta sull'esposizione valutaria effettiva (e non simulata, come l'esempio precedente) di 54 banche australiane. I dati settimanali sui portafogli sono stati collezionati dalla Reserve Bank of Australia su un periodo di dieci anni, dal 1987 al 1997. I portafogli fx sono rappresentativi delle esposizioni a 9 cross diversi. Cfr. Engel J. e M. Jizycki, 1999. Il rischio del portafoglio di ciascuna banca è stato stimato utilizzando quattro differenti approcci di misurazione: l'approccio varianza-covarianza (con pesi fissi ed esponenziali, il Garch multivariato (constant-correlation Garch, BEKK Garch, Orthogonal Garch) e la Kernel estimation); l'approccio delle simulazioni storiche (HS classica, antithetic HS, simulated variances in conjunction with correlation, ed exponential HS); le simulazioni Montecarlo (da una normale ed utilizzando una mistura di normali); ed infine l'Extreme Value estimation. Tutti i metodi sono stati analizzati su 5 diverse finestre temporali fisse di dati giornalieri (125, 250, 500, 750 e 1250 giorni).

³⁰ Cfr. anche Hendricks D., op. cit..

nell'attuale schema di conversione delle stime VaR, anche più elevati oneri di capitale. Ciò verifica come la libertà lasciato alle banche nella selezione del modello VaR da adottare possa essere influenzata dal rapporto tra capitale "generato" istantaneamente dal modello selezionato e probabilità di eventuali maggiorazioni dovute all'applicazione del fattore di *add-on*. L'intermediario è lasciato di fronte alla valutazione del *trade-off* tra livello di accuratezza del modello VaR e onere di capitale corrispondente. Le performance relative dei diversi modelli divengono quindi elementi critici nell'ottica dell'*incentive-compatibility* menzionata e nella potenziale apertura di finestre di arbitraggio regolamentare.

4. La metrica VaR ed i suoi problemi endogeni

Volatilità delle stime VaR³¹: poiché i numeri VaR sono quantili della distribuzione (modellata od empirica) dei profitti e perdite di portafoglio, essi hanno una loro variabilità nel tempo. Anche dai grafici riferiti alle elaborazioni sopra presentate si può osservare la variabilità delle stime VaR. Laddove vengano stabiliti dei limiti VaR nelle diverse business units o trading desk, e poiché il VaR è utilizzato per determinare il capitale a rischio di mercato, stime VaR particolarmente variabili possono risultare in costose fluttuazioni del capitale se la banca detiene un livello di capitale sui livelli minimi previsti dal modello, il costo del ribilanciamento di portafoglio per rimanere all'interno dei limiti VaR può essere elevato.

Sub-additività: poiché il VaR di una somma può essere più elevato della somma dei singoli VaR, è implicito che il VaR non sia sempre sub-additivo³². La desiderabilità della proprietà di sub-additività deriva dal riconoscimento della diversificazione. Senza sub-additività si avrebbe che: $\text{VaR}(A+B) > \text{VaR}(A) + \text{VaR}(B)$, ossia la diversificazione risulterebbe in maggior rischio. La sub-additività sarebbe garantita se i diversi portafogli (o assets appartenenti ad uno stesso portafoglio) obbedissero ad una distribuzione normale multivariata. Anche qualora si adotti l'approccio "prudenziale" di sommare i VaR, ad es. dei singoli desk, al fine di aggregare i rischi, se non vi è sub-additività questa modalità "prudenziale" non si configura più come tale, poiché il VaR totale può essere maggiore della somma dei VaR dei singoli desk³³.

Il VaR non fornisce una stima della forma della funzione di perdita nella coda della distribuzione. Nella stima dei rischi si dovrebbe essere interessati alla verosimile stima delle perdite non solo in un punto della distribuzione (es. il VaR al 99%), ma alla distribuzione delle perdite laddove un determinato, elevato *threshold* venga superato. Come mostrato negli esempi del par. 2.2, è relativamente semplice creare portafogli per i quali non vi è una corrispondenza di valori di VaR più elevati a fronte di rischi manifestamente maggiori. La semplice stima del VaR non fornisce quindi informazioni sulla forma della funzione di *payoff* del portafoglio e sulla perdita attesa (*expected shortfall*) condizionale al fatto che un elevato *threshold* della distribuzione dei profitti e perdite venga superato. Il VaR si configura peraltro come una misura di rischio soggetta al *tail risk*, poiché fallisce nel riassumere completamente la scelta relativa tra portafogli differenti a causa della sottostima del rischio dei portafogli con *payoff* caratterizzati da distribuzioni con code spesse.

5. Una nuova proposta *incentive-compatible*: il *regulatory-VaR* ed il *break-even scaling factor*

Le soluzioni che si intendono qui proporre partono dalla individuazione di una misura implicita di avversione al rischio del *regulator*. Ciò al fine di rimanere il più possibile aderenti al livello di *ratio* sistemici di patrimonializzazione desiderati dagli organi di vigilanza per i soggetti vigilati a fronte di movimenti avversi, severi e prolungati dei fattori di rischio di mercato. Questa misura consente di stabilire un nuovo sistema dove il fattore di moltiplicazione non è più una costante, ma è variabile in funzione della risultanze

³¹ "The Emperor has no Clothes: Limits to Risk Modelling", Danielsson J., Financial Markets Group, LSE, September 2001.

³² Una funzione f è subadditiva se $f(x_1 + \dots + x_n) \leq f(x_1) + \dots + f(x_n)$

³³ Cfr. Yamay e Yoshiha, op. cit.

della misura di rischio adottata. Tale sistema si vedrà essere disegnato in maniera coerente con le finalità della vigilanza, ottenendo nel contempo una soluzione ai problemi di carenza/incompatibilità degli incentivi ai fini del miglioramento continuo dei modelli interni da parte degli intermediari e di una maggior *disclosure* del livello effettivo di rischio sostenuto.

5.1 Normalità implicita nella graduazione dello scaling factor

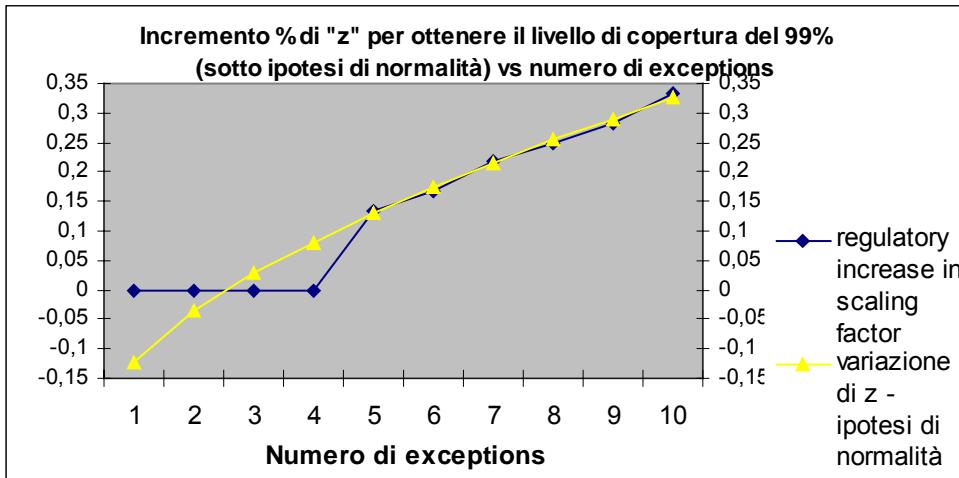
Per tale finalità si è analizzato cosa è隐含的 nel meccanismo di graduazione del fattore di *add-on*. Si può verificare dalla tabella sottostante come l'incremento complessivo del fattore di scala è del 33% (dal minimo di 3 a 4). Dal numero di violazioni in eccesso rispetto al valore di 2,5 (corrispondente al livello di copertura "di vigilanza" del 99% su 250 giorni) si può desumere in maniera diretta il grado di copertura effettiva del modello interno mediante la formula: $0,99 - (E - 2,5)/250$ (colonna d), con E il numero effettivo di violazioni. Dalle tavole dell'area della curva normale si individuano direttamente i valori di "z" corrispondenti al grado effettivo di copertura del modello (colonna e). Considerando un valore di "z" pari a 2,323, che corrisponde al 99% di copertura secondo l'ipotesi di normalità e rapportandolo ai valori di "z" desunti dal livello di copertura effettivo del modello interno si può calcolare l'incremento da applicare al "z" (colonna f) implicito nei risultati del modello interno affinché sia ripristinato il grado di copertura al 99%, sempre secondo l'ipotesi di normalità.

Dai risultati è evidente che l'assunzione implicita nella schema stabilito dal Comitato di Basilea è che i modelli delle banche che producono livelli di copertura non adeguati "devono" essere "scalati" secondo un'ipotesi di normalità³⁴ (cfr. grafico sottostante). Infatti, al di là dell'eventuale specificazione distributiva sottostante il modello VaR utilizzato, per le finalità di capitale di vigilanza il Comitato di Basilea ha reso indifferente il modello stesso, in quanto gli eventuali errori vengono comunque corretti in base all'ipotesi "esogena" di normalità. V'è peraltro da aggiungere che la correzione degli output dei modelli VaR secondo la predeterminata assunzione distributiva di normalità non era necessaria al Comitato di Basilea: la graduazione del fattore di *add-on* non è infatti necessariamente funzionale all'ipotesi di normalità, poiché è agevole stabilire scale di *add-on* in funzione dell'area sotto ipotesi distributive differenti dalla normale.

a exceptions	b scaling factor	c increase in scaling factor	d effective coverage	e effective "z"	f "z" percent changes under normality assumption
0	3	0%	1		
1	3	0%	0,996	2,65	-12,3%
2	3	0%	0,992	2,41	-3,6%
3	3	0%	0,988	2,26	2,8%
4	3	0%	0,984	2,15	8,0%
5	3,4	13,3%	0,98	2,055	13,0%
6	3,5	16,7%	0,976	1,98	17,3%
7	3,65	21,7%	0,972	1,91	21,6%
8	3,75	25,0%	0,968	1,85	25,6%
9	3,85	28,3%	0,964	1,8	29,1%
10	4	33,3%	0,96	1,75	32,7%

Si possono verificare i risultati delle colonne c ed f della tabella nel grafico sottostante.

³⁴ Peraltra l'assunzione di normalità è disseminata in altri elementi quantitativi forniti dal Comitato di Basilea, come ad es. il legame tra VaR giornaliero e VaR decadale di vigilanza ottenuto via *square-root-of-time rule*.



Mediante la struttura di graduazione proposta, il Comitato di Basilea ha quindi implicitamente comunicato la forma funzionale che approssima la sua avversione al rischio. Stabilito ciò, si può passare oltre, inserendo la stessa in un contesto che vada a superare in maniera strutturata le criticità finora evidenziate nel vigente schema di adeguatezza del capitale per i rischi di mercato.

5.2 Regulatory risk aversion, break-even scaling factor e regulatory-VaR: combinando i building blocks....

L'assunzione implicita di normalità da parte del Comitato di Basilea delle stime VaR prodotte dai modelli interni è evidente dal grafico sopra rappresentato. La “*regulatory correction*” dell’eventuale carenza di copertura dei modelli interni rispetto al target del 99% avviene infatti con una graduazione del fattore di *add-on* tale da ripristinare la copertura stessa secondo l’ipotesi di normalità.

Sono già stati evidenziati i problemi di *incentive-compatibility* derivanti dalla carenza di discriminazione tra intermediari finanziari che, pur fronteggiando gli stessi rischi, adottino modelli con capacità previsiva differenti, arrivando al risultato paradossale di pretendere un onere di capitale maggiore dagli intermediari con modelli interni di stima del rischio di mercato più robusti.

E’ stato inoltre messo in luce come, nell’attuale sistema di *setting* del requisito patrimoniale, a parità di rischi sopportati ed a parità di capacità previsiva e complessità di due differenti metodi, vi siano differenze anche significative (pari al 23% nelle risultanze dell’analisi riportate nel paragrafo 3) negli oneri di capitale applicati ai due differenti intermediari.

Si vuole ora affrontare unitariamente le problematiche evidenziate, andando oltre rispetto alle proposte ad oggi disponibili. Un possibile approccio può essere individuato mediante la determinazione di un fattore di moltiplicazione di indifferenza (*break-even scaling factor*) e la combinazione dello stesso ad un predefinito *lower bound* al VaR (che qui definiamo come *regulatory-VaR*).

Il *regulatory-VaR* si prefigura come l’onere minimo di capitale di riferimento a fronte dei rischi di mercato, determinato in base ad una prestabilita assunzione distributiva. Poiché l’*implied risk aversion* dei *regulators* è stata dimostrata come afferente ad un elevato percentile della distribuzione normale, moltiplicato per l’orizzonte decadale e per il fattore di moltiplicazione minimo pari a tre, il *regulatory-VaR* coerente con questa *risk aversion* è il VaR calcolato secondo l’assunzione distributiva “esogena” di normalità, fornita dagli organi di vigilanza, e considerata in un punto corrispondente al 99° percentile dal lato delle perdite.

L’individuazione di una ipotesi distributiva regolamentare consente quindi di fissare un livello minimo di capitale a rischio di mercato (ossia il nostro *regulatory-VaR*) che, a parità di esposizioni per

differenti intermediari, generi una traduzione del rischio in capitale identico per tutti³⁵. Ciò indipendentemente dal modello interno VaR utilizzato, poiché il sistema attuale già prevede che la stima VaR interna venga eventualmente scalata secondo l'ipotesi di normalità in funzione dei risultati dei test retrospettivi.

La carenza di incentivo al miglioramento continuo dei modelli interni, le problematiche di selezione “strategica” del modello interno, del *tail risk* e della *risk manipulation* verrebbero superate dal legame tra *regulatory-VaR* e fattore di moltiplicazione di indifferenza. L'onere di capitale di riferimento a fronte del rischio di mercato (ossia il nostro *regulatory VaR*) è quello definito con l'utilizzo della distribuzione normale³⁶. Anche utilizzando metodi migliori (più conservativi) dell'approssimazione normale il requisito di capitale rimarrebbe quello trovato con la normale³⁷, in quanto il fattore di moltiplicazione minimo che qui si vuole proporre è una funzione variabile dipendente da un fattore di proporzionalità. L'entità della proporzionalità è pari al rapporto tra *regulatory VaR* e VaR del modello proprietario (e l'inverso di questo rapporto indica il miglioramento percentuale ottenuto nella stima della minima perdita probabile da metodi diversi dalla normale, ossia i valori in ascissa del grafico sottostante). Si abbia:

- 1. $RC(N) = VaR(N) * \sqrt{10} * FM(v)$,**
- 2. $RC(IM) = VaR(IM) * \sqrt{10} * FMi(v)$**

dove:

- $RC(N)$ rappresenta il requisito di capitale corrispondente al *regulatory lower bound* al VaR (per brevità *regulatory-VaR*, o $VaR(N)$);
 - $RC(IM)$ il requisito corrispondente all'utilizzo del modello interno dell'intermediario.
- $FM(v)$ e $FMi(v)$ rappresentano i fattori di moltiplicazione in funzione del *violation ratio* “ v ”, con:
- $FM(v)$ corrisponde al sistema attuale, ossia al valore 3;
 - $FMi(v)$ individua invece un nuovo sistema di fattori di moltiplicazione di indifferenza (*break-even scaling factor*).

Uguagliando le espressioni 1. e 2. ed esprimendole in funzione di $FMi(v)$ si ottiene:

$$3. \quad FMi(v) = [FM(v) * VaR(N)] / VaR(IM),$$

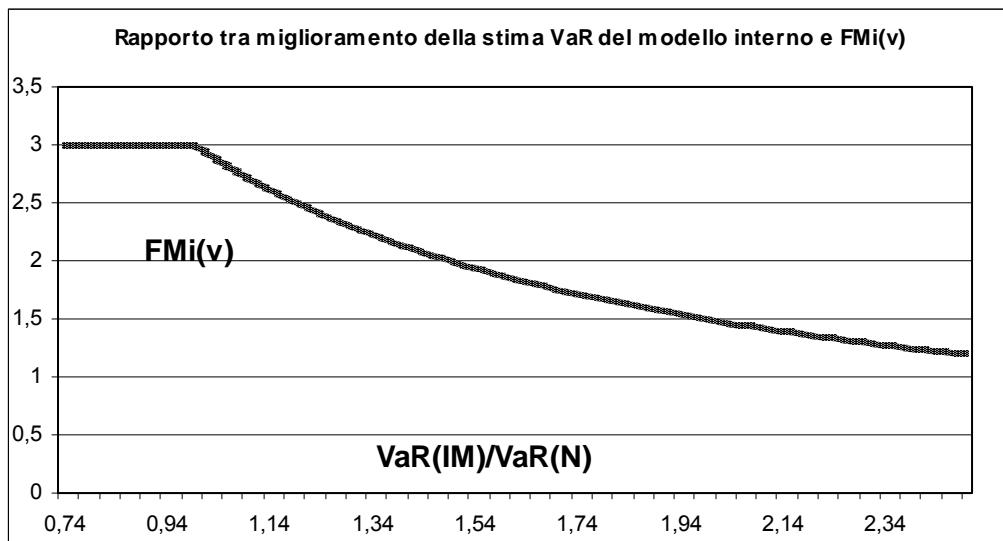
dove: $VaR(N)/VaR(IM)$ è il rapporto tra le due stime VaR che fornisce il fattore di scala da applicare all'originario $FM(v)$ per ottenere il nuovo fattore di moltiplicazione di indifferenza.

³⁵ Le recenti evoluzioni critiche al sistema stabilito dal Comitato di Basilea ipotizzano come identici sistemi di *risk management* possano eventualmente contribuire ad innalzare il rischio sistemico. Tra gli obiettivi delle autorità di vigilanza dovrebbe esserci quello di preservare il sistema bancario appunto da crisi sistemiche (o alternativamente ridurre il costo economico dell'instabilità finanziaria). L'adozione di regole di *risk capital* uguali per tutti determinerebbe, sotto alcune ipotesi, una maggiore probabilità di accadimento all'evento crisi sistemica. Questo poiché l'assunzione esplicita di molti *risk models* è che i dati di mercato seguano un processo stocastico che dipende unicamente dalle osservazioni passate e da altre variabili di mercato. La numerosità degli attori nel mercato è poi tale che in aggregato le loro azioni sono casuali e non possono influenzare il mercato (che il rischio sia “esogeno” al mercato e che la previsione della volatilità di un attore del mercato non influenzi la volatilità futura può infatti essere valido in periodi “normali” di mercato, quando le azioni dei partecipanti si compensano l'un l'altra). Con ciò assumendo che il ruolo di un *risk forecaster* sia assimilabile a quello di metereologo, che esplicita delle *forecast* sulle condizioni meteorologiche, ma nel contempo non può influenzarle. Nella realtà, e specialmente in periodi di crisi finanziarie, vengono eseguite strategie di *hedging* dei rischi molto simili e le “normali” relazioni statistiche saltano (es. le correlazioni e le volatilità implicite aumentano repentinamente). Se a ciò si impone un vincolo esterno di rischio simile per tutti i partecipanti al mercato, è la regolamentazione stessa dei rischi che può amplificare le crisi. (cfr. Danielsson et al., 2001; Embrechts et al. 2001).

³⁶ Ossia sarà sempre ottenuto in maniera proporzionale alla variabilità del portafoglio: il fattore di proporzionalità minimo rimane pari a circa 22 volte la deviazione standard del portafoglio. Gli organi di vigilanza potrebbero fissare dei parametri uguali per tutti per il calcolo del Var "normale" o *regulatory-VaR* (ad. es., una predeterminata lunghezza della serie storica).

³⁷ Così da eliminare ogni forma di disincentivo all'utilizzo di metodi migliori dell'approssimazione normale.

L'applicazione del fattore FMi (v) realizzerà una continua corrispondenza³⁸ del requisito di capitale generato dalla stima VaR(IM) del modello interno con il requisito di capitale calcolato con il *regulatory-VaR* moltiplicato per l'FM(v) previsto dall'*Amendment*.



Graficamente si può verificare la velocità del decremento del fattore di moltiplicazione di indifferenza FMi(v) in funzione del rapporto tra stima VaR del modello interno rispetto a quella derivante dal *regulatory-VaR*. Per stime VaR identiche (ossia quando si ottiene il valore 1 sull'asse delle ascisse), il fattore di moltiplicazione rimane pari a tre. L'utilizzo di questo approccio dovrebbe avvenire in modo binario. Se:

1. $\text{VaR(IM)} \geq \text{VaR(N)}$, allora si utilizza FMi(v);
2. $\text{VaR(IM)} < \text{VaR(N)}$, allora si utilizza FM(v).

Il secondo caso potrebbe avversi, tra gli altri, ad es. per una distribuzione del *payoff* del portafoglio non continua nella coda sinistra. Tale eventualità “non-incentivante” verrebbe superata in un approccio evolutivo del Comitato di Basilea che andasse a privilegiare un utilizzo per le finalità di *capital adequacy* di misure di rischio diverse dal VaR.

Quello proposto è un semplice adattamento, conforme all'ottica di vigilanza prudenziale, che incentiva gli intermediari a sviluppare ed utilizzare modelli e/o misure di rischio migliori di quelli basati sull'approssimazione normale, in quanto relativizza il valore del fattore di moltiplicazione, che diventa una funzione variabile dipendente dal “miglioramento” rispetto alla normale ottenuto dal modello interno di ogni singolo intermediario. Questa logica può essere la base per nuovi sviluppi non soggettivi nello schema di incentivazione, con risultati di minore onerosità nello sviluppo e utilizzo di modelli VaR migliori e/o misure di rischio più coerenti. Questo approccio peraltro è implementabile anche in funzione di un *lower bound* formulato in base ad una distribuzione qualsiasi (modellata od empirica che sia). La formulazione selezionata in questo lavoro sulla base dell'ipotesi di normalità è unicamente in funzione dell'avversione al rischio del regulator (qui utilizzata come elemento esogeno) implicita nell'attuale schema.

5.3 Fattore di moltiplicazione di indifferenza ed *expected shortfall*

Il nuovo approccio presentato trova la sua naturale applicazione laddove misure di rischio che rispettino gli assiomi di coerenza³⁹ venissero utilizzate a fini di determinazione del capitale di vigilanza. Il mantenimento dell'attuale sistema di conversione delle stime VaR in *risk capital* inibirebbe (dato il

³⁸ E questo darà luogo, per i due metodi, allo stesso requisito di capitale, ma a fronte di diversi valori del VaR.

³⁹ Cfr per tutti Artzner et al., 1997, op. cit., Acerbi e Tasche, 2001; Acerbi, 2002.

verosimile maggior costo in termini di capitale) lo sviluppo e l'utilizzo di misure di stima del rischio più robuste e coerenti del VaR.

L'ES consente poi una *disclosure* effettiva del reale rischio⁴⁰ cui un portafoglio è esposto, minimizzando le possibilità di manipolazione dei numeri VaR e quindi l'eventuale *moral hazard* dell'intermediario. La differenza di magnitudine tra stime VaR e stime di ES⁴¹ renderebbe eccessivamente costoso, con il sistema attuale, implementare una conversione delle stime di ES in proporzionali oneri di capitale. Tale difficoltà verrebbe superata nell'ambito della soluzione proposta, con un *break-even scaling factor* determinato dal rapporto tra *regulatory-VaR* e ES calcolato al 99% di intervallo di confidenza. Vedasi il lavoro di Vanini e Leippold (2003) che, pur partendo da considerazioni differenti, giungono a conclusioni similari.

5.4 La *disclosure* e le penalità nel nuovo approccio

Lo schema proposto incorpora nei suoi stessi elementi una profondità di *disclosure* ed una tempistica della stessa di sicuro interesse per gli organi di vigilanza. Con il sistema attuale, il Comitato di Basilea riceve trimestralmente dagli intermediari le informazioni sul VaR e sui risultati dei test retrospettivi. Con il sistema proposto il *regulator* avrebbe a disposizione:

1. l'informazione sul *regulatory-VaR*;
2. l'informazione sul VaR calcolato dal modello interno;
3. il valore del *break-even scaling factor* (*besf*);
4. l'informazione sui risultati del backtesting del VaR calcolato dal modello interno.

In particolare il valore del *besf* potrebbe essere utilizzato per stabilire delle soglie di comunicazione del rischio sopportato alle autorità di vigilanza. A titolo di esempio si consideri l'ipotesi che la percentuale di minima perdita probabile calcolata con il *regulatory-VaR* su un portafoglio diversificato di titoli azionari sia pari a -4%. Il modello interno VaR fornisce invece -5%. Il *besf* sarà quindi pari a 2,4. Ipotizziamo ora un *regime shift* nei fattori di rischio sottostanti il nostro portafoglio e, con un *regulatory-VaR* invariato al -4%, il modello interno VaR fornisca una stima di -8%. Si avrebbe in questo caso un *besf* pari a 1,5. La modifica di rischiosità viene riconosciuta agevolmente e sinteticamente nel valore del *break-even scaling factor*. Le autorità di vigilanza potrebbero stabilire dei livelli *standard* del *besf* (ed eventualmente differenti in funzione dell'*asset class*) per i quali vi sia un obbligo di comunicazione da parte dell'intermediario. Si potrebbe per esempio avere il normale flusso di *disclosure* per valori di *besf* compresi tra 3 ed 1,5 nonché soglie di *warning* per la comunicazione tempestiva alla vigilanza (fissate a 1,5 ed 1). La stessa immediatezza della *disclosure* nei valori di soglia del *besf* si pone come un potente incentivo per gli intermediari alla considerazione dei rischi nelle *fat tails*.

Nell'approccio proposto la struttura delle penalità espressa mediante la graduazione del fattore di *add-on* a nostro avviso perderebbe di significato. L'incentivo per gli intermediari ad una corretta misurazione dei rischi è infatti già incorporato nel sistema qui proposto e la struttura delle penalità diviene in tale contesto ridondante.

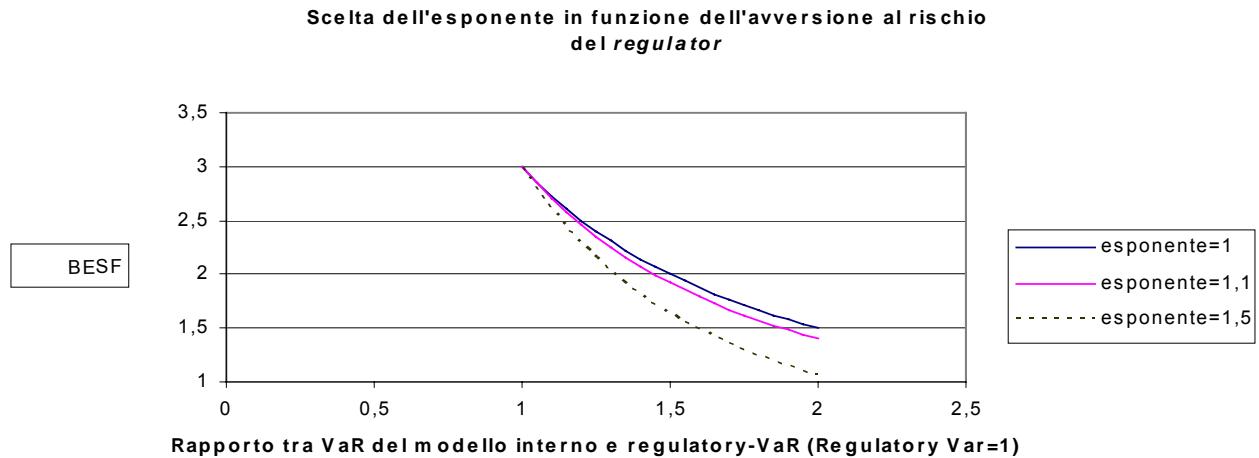
5.5 Una possibile linea evolutiva

Dai risultati ottenuti è possibile anche derivare una ulteriore linea evolutiva: una regola di diminuzione parametrica del fattore di moltiplicazione minimo in funzione dell'avversione al rischio

⁴⁰ Cfr. Yamay e Yoshiha, 2002-E-2, pg. 6. I due autori mostrano come anche l'expected shortfall possa avere un tail risk, anche se quest'ultimo è meno significativo del tail risk sopportato con il Var. Questo poiché il Var non riesce a tenere conto delle perdite oltre l'intervallo di confidenza prescelto, mentre l'expected shortfall le considera come aspettativa condizionale.

⁴¹ Per una analisi su portafogli con combinazioni di azioni ed opzioni su azioni e su portafogli di corporate bonds con differenti gradi di correlazione, si veda Yoshiha e Yamay, 2002. V'è peraltro da considerare che vi sono al momento rilevanti problemi pratici di applicazione dell'ES allo schema di adeguatezza del capitale, tra cui il maggiore errore di stima dello stesso ES rispetto al VaR e l'assenza di studi e test empirici di backtesting dell'ES.

dell'organo di vigilanza e/o della valutazione della bontà del sistema di risk management dell'intermediario. A questo scopo, $FMi(v)$ può essere riespresso come⁴²: $Fmi(v) = FM(v)^* [VaR(N) / VaR(IM)]$. Il secondo termine della parte destra dell'espressione (ossia il fattore di scala del fattore di moltiplicazione previsto dall'*Amendment*) è riscrivibile nella forma: $VaR(N) * VaR(IM)^{-(a)}$.



dove l'esponente (a), finora considerato implicitamente pari a uno, può essere considerato come un indicatore dell'avversione al rischio dell'organo di vigilanza (o, ancora, della dimostrata robustezza del sistema interno di *risk management* dell'intermediario). Si può verificare dal grafico la variazione del fattore di moltiplicazione minimo per diversi valori dell'esponente di avversione al rischio e diversi livelli di miglioramento della stima VaR fornita dal modello proprietario rispetto al *regulatory-VaR* normale (fissato convenzionalmente pari a uno nell'asse delle ascisse). Con un valore dell'esponente pari ad uno si ottiene il semplice *shift* descritto finora, che, individuato il fattore di moltiplicazione di indifferenza, mantiene inalterato l'onere di capitale rispetto al *regulatory-VaR* e consente così l'adozione di modelli migliori senza il disincentivo dell' $FM(v)$ fissato. Per valori progressivamente maggiori di 1 l'esponente assicura una forma della funzione che descrive il fattore di moltiplicazione di indifferenza che decade più velocemente, stabilendo quindi una possibile soluzione parametrica alla potenziale diminuzione del requisito di capitale. Tale approccio può essere argomento di futuri approfondimenti.

6. Conclusioni: verso Basilea 3?

In questo lavoro si è proposto un nuovo approccio per la determinazione di uno degli elementi più discussi tra quelli che consentono la conversione delle stime di minima perdita probabile in oneri di capitale di vigilanza. L'onere di capitale così individuato non è più legato ad un fattore di moltiplicazione minimo fissato pari a 3, e nemmeno viene ridotto secondo regole soggettive e arbitrarie. Lo schema proposto è costruito con l'obiettivo di essere *incentive-compatible*. Da un lato viene eliminata la generale disincentivazione presente nell'attuale schema di Basilea allo sviluppo ed utilizzo di misure di rischio più accurate nelle code delle distribuzioni, che dovrebbero configurarsi come l'essenza stessa delle attenzioni della vigilanza bancaria. Dall'altro l'approccio di combinare lo *scaling factor* di Basilea ad un semplice fattore di proporzionalità può contenere agevolmente altre misure di rischio più coerenti, rendendo sostanzialmente *tailor-made* la misura di rischio adottabile da ciascuna istituzione finanziaria.

Nello schema individuato viene lasciata invariata l'ingerenza del fattore 3, conservandone la potenza moltiplicativa nella conversione dal valore a rischio in requisito di capitale, ma nel contempo liberando le potenzialità degli intermediari per sviluppare ed utilizzare metodi e/o misure di rischio più coerenti con

⁴² Nella notazione si fa riferimento al VaR ottenuto con il modello interno, ma la regola è generalizzabile per qualsiasi misura di rischio $\rho(X)$ che rispecchi la condizione $\rho(X) \geq VaR(N)$.

l’oggetto stesso di interesse: le code estreme delle distribuzioni dei rendimenti. Le assunzioni sottostanti il fattore 3 possono infatti anche essere condivisibili in una logica di approssimazione della minima perdita probabile utilizzando la normale, ma metodi e/o misure di rischio che si dimostrino più robuste e/o coerenti potrebbero quanto meno essere scalate in considerazione della verosimile maggiore perdita probabile prevista rispetto alla normale. Nel sistema proposto sono quindi naturalmente comprese misure di rischio diverse dal VaR, come l’*expected shortfall* (ES).

La soluzione individuata risulta inoltre compatibile con l’*implied risk aversion* dei regulators, con lo schema vigente di conversione delle stime VaR in oneri di capitale ed è coerente con lo spirito di incentivazione degli intermediari ad un miglioramento continuo dell’*assessment* dei rischi, mantenendo peraltro la giusta condizione di semplicità di implementazione.

La futura auspicata evoluzione dello schema di vigilanza prudenziale nella direzione di accogliere misure di rischio più coerenti del VaR e meno esposte del VaR al *tail risk* e ad arbitraggi regolamentari verificherebbe nell’approccio qui proposto uno schema base coerente, *incentive-compatible* e semplice da implementare. La coerenza strutturale della relazione proposta è infatti mantenuta a fronte delle eventuali evoluzioni nella metrica di rischio utilizzata (ad es. si potrebbe avere un sistema con *Regulatory-VaR* e *ES(internal model)*). Verrebbe pertanto meno un’area potenziale di “fallimento” dell’attuale sistema di conversione delle stime VaR in oneri di capitale, eliminando l’incentivo per gli intermediari a sfruttare la conoscenza dell’ES (laddove ad esso sia proporzionale un rendimento atteso) dato un vincolo di capitale e di *disclosure* formulato in termini proporzionali al VaR. In tale approccio è peraltro possibile incorporare eventuali future evoluzioni del sistema di vigilanza prudenziale, come quella proposta, che andassero a ridurre il fattore di moltiplicazione minimo.

Appendice 1

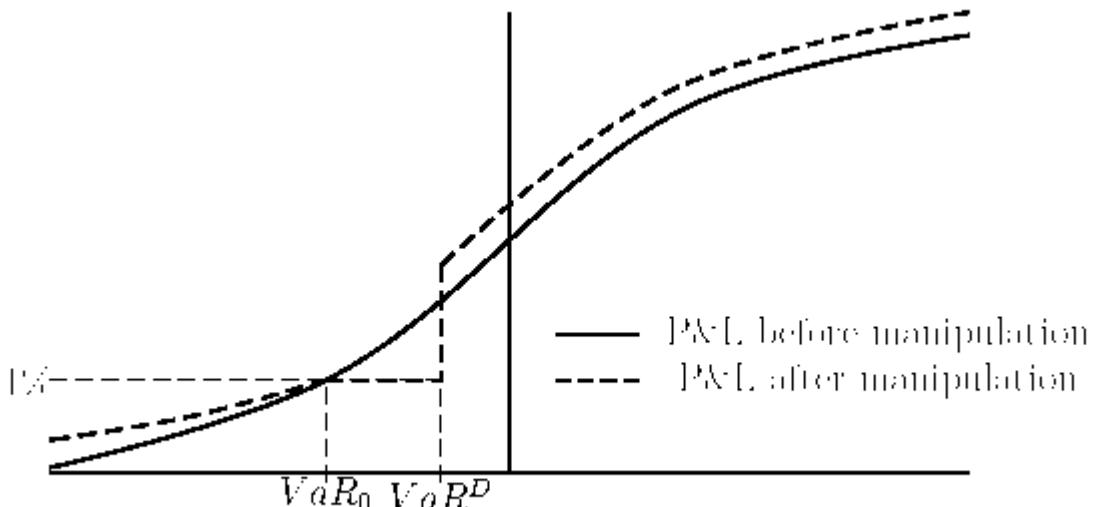
BACKTESTING e scaling factor

Number of Exceptions (250 Trading Days)	Scaling Factor	Cumulative Probability (Percent)
0 to 4	3.00	10.78
5	3.40	4.12
6	3.50	1.37
7	3.65	0.40
8	3.75	0.11
9	3.85	0.03
10 or more	4.00	<0.01

Nota. La colonna delle probabilità cumulate riporta la probabilità che un modello accurato generi un numero di violazioni maggiore di quanto riportato nella corrispondente riga della prima colonna. Questi valori sono generati utilizzando una distribuzione binomiale con l'assunzione di una dimensione del campione di 250 giorni di mercato aperto. Per le finalità dei test retrospettivi canonizzati nel *framework* del Comitato di Basilea, un modello accurato è quello che fornisce una stima accurata del 99-esimo percentile della distribuzione giornaliera dei profitti e perdite di portafoglio su 250 giorni di mercato aperto. Dalla tabella si evince quindi che un modello accurato produrrà più di 6 violazioni su 250 giorni di previsione del VaR solo 1,37 volte su 100 ipotetiche finestre temporali di dati da 250 giorni.

Le tre zone stabilite dal Comitato di Basilea sono: - green zone (da 0 a 4 exceptions); - yellow zone (da 5 a 9 exceptions); - red zone (10 o più exceptions).

Appendice 2



Bibliografia

- Acerbi C., "Spectral Measure of Risk: A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion", Journal of Banking and Finance, Luglio 2002.
- Acerbi C. e Tasche D., "On the Coherence of Expected Shortfall", Working Paper, Center for Mathematical Science, Munich University of Technology, 2001
- Artzner P., F. Delbaen, J. Eber e D. Heath, "Thinking Coherently", Risk, Novembre 1997, pgg. 69-71.
- Basle Committee on Banking Supervision, "Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk", Gennaio 1996.
- Basle Committee on Banking Supervision, "Supervisory Framework for the use of "Backtesting" in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements", Gennaio 1996.
- Basle Committee on Banking Supervision, "Modifications to the Market Risk Amendment", Settembre 1997.
- Dacorogna M.M., Muller U.A., Pictet O.V. e C. de Vries, "The distribution of extremal foreign exchange rate in extremely large data sets", Timbergen Institute, Rotterdam, Dicembre 1996, Working Paper 70-96, pg.18.
- Danielsson J., P. Hartmann e C. de Vries "The Cost of Conservatism. Extreme Returns, Value-at-Risk and the Basle Multiplication Factor", Risk, Gennaio 1998, pgg. 101-103.
- Danielsson J. e C. de Vries "Value-at-Risk and Extreme Returns", London School of Economics-Financial Market Group, Settembre 1997, Discussion Paper n.273.
- Danielsson J. e C. de Vries "Where Do Extreme Matter?", Febbraio 2002, Working Paper, www.RiskResearch.org.
- Danielsson J. "The Emperor has no Clothes: Limits to Risk Modelling", London School of Economics-Financial Market Group, Settembre 2001.
- Danielsson J. e C. de Vries, "Tail Index and Quantile Estimation with Very High Frequency Data", The Journal of Empirical Finance, 1997, n.4.
- Danielsson J. e B.N. Jorgensen, "Incentives for Effectives Risk Management", Erasmus University Rotterdam, Timbergen Institute, Settembre 2001.
- Danielsson J., Embrechts P., Goodhart C., Keating C. Muennich F., Renault O. e Shin H.S., "An Academic Response to Basel II. The New Basel Capital Accord: Comments received on the Second Consultative Package", Financial Markets Group, LSE and ESRC Research Center, Special Paper no.130, Maggio 2001.
- Diebold F.X., Schuermann T. e J.D. Stroughair, "Pitfalls and Opportunities in the Use of Extreme Value Theory in Risk Management", The Wharton Financial Institution Center, University of Pennsylvania, Working Paper n. 98-10, pg.3.
- Embrechts P., C. Klüppelberg e T. Mikosh "Modelling Extremal Events for Insurance and Finance", Springer-Verlag, 1997.
- Engel J. e M. Jizycki, "Conservatism, Accuracy and Efficiency: Comparing Value-at-Risk Models", Reserve Bank of Australia, Marzo 1999.
- Enria A. e S. La Viola, "Requisiti patrimoniali, incentivi e controllo del rischio", Rivista Bancaria, 1997, n.1, pgg. 91-105.
- Estrella A., "Formulas or Supervision? Remarks on the Future of Regulatory Capital", FRBNY Economic Policy Review, Ottobre 1998.
- Hendriks D. "Evaluation of Value-at-Risk Models using Historical Data", FRBNY Economic Policy Review, Aprile 1996, pgg. 39-69.

Hill B., "A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution", The Annals of Statistics, 1975, n.5, pgg. 1173.

JP Morgan, "RiskMetrics™", Technical Document, 4th Edition, 1996.

Kearns P. e A. Pagan, "Estimating the Density Tail Index for Financial Time Series", The Review of Economic and Statistics, 1997, pgg. 171-175.

Kupiec P. e J. O'Brien, "Model Alternative" Risk, Giugno 1995.

O'Brien J. e J. Berkowitz, "How Accurate are Value-at-Risk Models at Commercial Banks", Division of Research and Statistics, Federal Reserve Board, Luglio 2001.

Sironi A. e M. Marsella, "La misurazione e gestione dei rischi di mercato", Il Mulino, 1997.

Stahl G., "Three Cheers", Risk, Dicembre 1997.

Taylor C., "A New General Approach to Capital Adequacy: A Simple and Comprehensive Alternative to Basel 2", Center for the Study of Financial Innovation, Dicembre 2002.

Vanini P. e M. Leippold, "Half as Many Cheers – The Multiplier Reviewed", Working Paper, 2003, www.Gloriamundi.org.

Yamai Y. e T. Yoshiba, "On the validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall", Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Gennaio 2002a.

Yamai Y. e T. Yoshiba, "Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition and Optimization", Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Gennaio 2002b.

Yamai Y. e T. Yoshiba, "Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Expected Utility Maximization and Tail Risk", Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Aprile 2002c.

Yamai Y. e T. Yoshiba, "Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR: Their Validity Under market Stress", Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Discussion Paper No. 2002-E-2